UNIDAD 5

Cinética.
Impulso y Cantidad de Movimiento.

5.0 Introducción.

El método del impulso y la cantidad de movimiento involucra a los conceptos físicos de ***fuerza, tiempo, masa y velocidad***, *por lo que es especialmente útil para resolver problemas en donde las fuerzas involucradas dependen del tiempo*. El método tiene múltiples aplicaciones al permitir estudiar problemas de choques, donde la variación de las fuerzas ocurre con gran intensidad en pequeños lapsos de tiempo, sistemas que ganan o pierden masa como la propulsión a chorro, y fuerzas de flujos contra objetos sólidos como el empuje del viento sobre fachadas y techumbres o sobre las aspas de aerogeneradores, así como chorros de agua sobre superficies desviadoras: aspas de turbinas, bombas y hélices.

5.1 Deducción.

Como habíamos mencionado anteriormente, la ecuación del impulso y la cantidad de movimiento proviene de la segunda Ley de Newton en su versión más común: ΣF = ma [1]

Consideremos una partícula (o cuerpo) de masa m sobre la que está actuando un conjunto de fuerzas ΣF, de manera que es aplicable la segunda ley del movimiento:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

Sustituimos la definición de aceleración $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v} / dt$

Quedando $\Sigma \boldsymbol{F} = m\, d\boldsymbol{v} / dt$

O bien $\Sigma \boldsymbol{F}\, dt = m\, d\boldsymbol{v}$

Integrando desde la velocidad $\boldsymbol{v_1}$ que la partícula tiene en el tiempo t_1, hasta la velocidad $\boldsymbol{v_2}$ que la partícula lleva en el tiempo t_2, tenemos:

[1] De hecho Newton formuló la segunda ley en términos de impulso y cantidad de movimiento.

$$\sum\int_{t1}^{t2} Fdt = m\int_{v1}^{v2} dv$$

$$\sum\int_{t1}^{t2} Fdt = mv_2 - mv_1 \qquad (5.1)$$

El primer término representa el impulso lineal total, ***suma de impulsos*** o impulso resultante, que actúa sobre la partícula, ocasionado por el conjunto de fuerzas $\Sigma\boldsymbol{F}$ que actúan durante el lapso de tiempo que va de t_1 hasta t_2. Los términos m$\mathbf{v_1}$ y m$\mathbf{v_2}$ son las cantidades de movimiento lineales (también llamadas *momentum*) de la partícula, antes y después de que actúan el conjunto de impulsos.

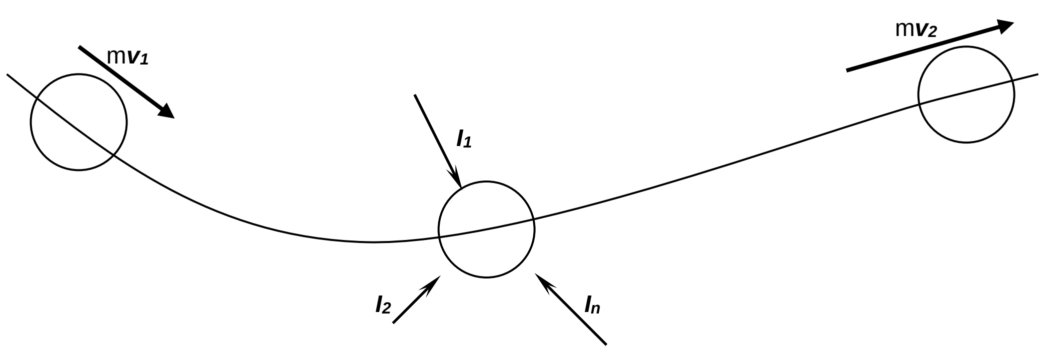
La ecuación anterior es el principio del impulso y la cantidad de movimiento para una partícula, y se puede enunciar de la siguiente manera:

La suma de los impulsos que actúan sobre una partícula es igual al cambio en su cantidad de movimiento.

Otra forma de escribirlo es:

$$mv_1 + \sum\int_{t1}^{t2} Fdt = mv_2 \qquad (5.2)$$

Que nos indica cómo, la cantidad de movimiento que un cuerpo tiene, al inicio de un proceso, mv_1 es modificada por la sumatoria de todos los impulsos, $\sum\int_{t1}^{t2} Fdt = \sum I_{1-2}$ de manera que al final, la cantidad de movimiento ya tiene otro valor mv_2



Nótese que la Ec 5.2 proporciona un *método directo de conocer la velocidad final de una partícula* cuando se conoce la velocidad inicial y las fuerzas que actúan sobre ella, siempre y cuando estas sean constantes o dependan del tiempo, ***sin necesidad de calcular la aceleración.***

Si todas las fuerzas que están actuando sobre el cuerpo son constantes la integral se puede resolver, si además el tiempo inicial t_1 se mide desde cero, la ecuación queda

$$m\boldsymbol{v_1} + \Sigma \boldsymbol{F}\, t = m\boldsymbol{v_2} \qquad (5.3)$$

Las ecuaciones 5.2 y 5.3 son vectoriales, de manera que pueden escribirse en función de sus componentes a lo largo de los ejes para su aplicación

$$\left.\begin{aligned} mv_{1X} + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_X\, dt &= mv_{2X} \\ mv_{1Y} + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_Y\, dt &= mv_{2Y} \\ mv_{1Z} + \Sigma\int_{t1}^{t2} F_Z\, dt &= mv_{2Z} \end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

Cuando en un problema hay dos o más partículas las ecuaciones del Impulso y la Cantidad de movimiento se pueden aplicar a cada una de las partículas por separado, o bien puede aplicarse al conjunto de cuerpos, en cuyo caso los impulsos de las interacciones de los cuerpos se anulan entre sí por presentarse por pares iguales y opuestos, y solo se consideran los impulsos de las fuerzas externas. Entonces podemos escribir

$$\Sigma m\boldsymbol{v_1} + \Sigma\int_{t1}^{t2} \bar{F} dt = \Sigma m\boldsymbol{v_2} \qquad (5.5)$$

Donde:

$\Sigma m\boldsymbol{v_1} = (m_A v_A + m_B v_B + ...+ m_i v_i)_1$ representa la suma de todas las cantidades de movimiento de las partículas al inicio del proceso.

$\Sigma m\boldsymbol{v_2} = (m_A v_A + m_B v_B + ...+ m_i v_i)_2$ representa la suma de todas las cantidades de movimiento de las partículas al final del proceso.

$$\Sigma\int_{t1}^{t2} F dt = \int_{t1}^{t2} F_1 dt + \int_{t1}^{t2} F_2 dt + ... + \int_{t1}^{t2} F_n dt = I_1 + I_2 + ... + I_n = \sum I_{1-2}$$

Es la suma de los impulsos sobre cada uno de los cuerpos durante la duración del proceso.

También puede ocurrir que no existan fuerzas externas aplicadas sobre el sistema de partículas considerado, o mejor dicho, que la suma de impulsos externos sea cero. En tal caso se anula el segundo sumando de la Ec. 4.5 quedando

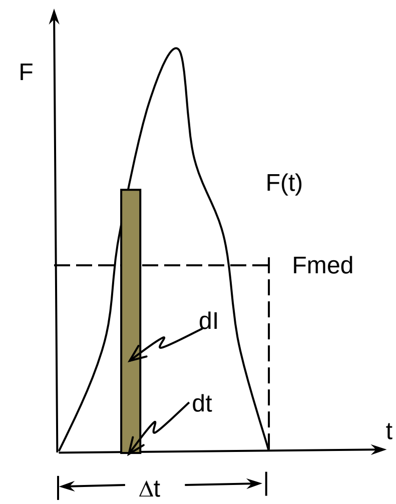
$$\Sigma m\boldsymbol{v_1} = \Sigma m\boldsymbol{v_2} \qquad (5.6)$$

Que se conoce como el *principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal* y que puede quedar enunciado como sigue: ***La cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas se conserva (o permanece constante) cuando no hay impulsos externos a dicho sistema, o cuando la suma de impulsos externos vale cero***

5.2 Fuerzas impulsivas.

En algunos problemas se presentan fuerzas de gran intensidad y corta duración, como la fuerza entre el bate y la pelota de béisbol y en general las fuerzas de choque, también las debidas a explosiones. Estas fuerzas modifican de manera notoria la cantidad de movimiento y se les conoce como ***impulsivas***. Otra característica es que varían de manera complicada y difícil de conocer.

En la figura se muestra una posible variación de una fuerza impulsiva o de choque, donde se nota un “pico” de gran intensidad y una duración del lapso de contacto Δt muy pequeño.



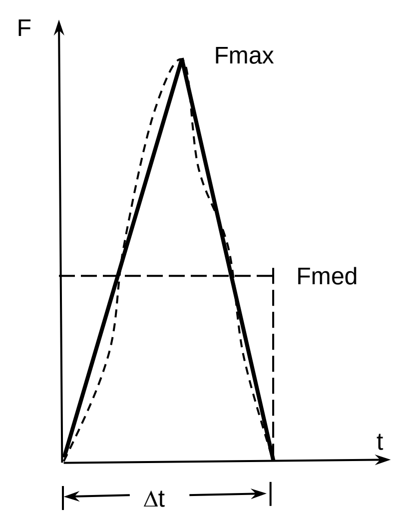
También se observa un impulso diferencial representado por el área del rectángulo de alto F(t) y ancho dt, de manera que el área bajo la curva representa el impulso total.

Si el rectángulo de base Δt y alto Fmed tiene la misma área, entonces Fmed es una fuerza constante que proporciona el mismo impulso y se conoce como la fuerza media o promedio.

Por lo anterior cuando actúan fuerzas impulsivas, es común hacer varias simplificaciones:

A) Despreciar el cambio en la cantidad de movimiento producido por las fuerzas no impulsivas, como el peso de la pelota y el bate.
B) Darle mayor importancia al impulso, es decir, al área bajo la gráfica.
C) Considerar la fuerza promedio Fmed que proporciona el mismo impulso.
D) Aproximar la gráfica a la forma de un triángulo, con lo cual la fuerza máxima Fmax es aproximadamente el doble de la fuerza media Fmed

$$F_{MAX} = 2F_{MED}$$



¿Cómo podrías demostrar lo anterior?

Procedimiento de análisis

1.- Representar gráficamente los términos de las ecuaciones 5.4 elaborando diagramas de la cantidad de movimiento al inicio y al final del proceso y un diagrama de impulso (similar al DCL) en un punto medio de la trayectoria.

2.- Aplicar la ecuación del impulso y la cantidad de movimiento a lo largo de los ejes.

3.- Si intervienen varias partículas se puede aplicar la Ecuación del impulso y la cantidad de movimiento a cada una, o bien aplicarlo al conjunto de cuerpos, Ec. 5.5, considerando solamente los impulsos externos, ya que los internos se anulan al presentarse por parejas iguales y opuestas.

Ejemplo 5.1 El bloque mostrado de 80 kg está originalmente en reposo sobre la superficie horizontal que tiene un coeficiente de fricción cinética de 0.1, si durante 15 segundos actúa una fuerza constante F = 300 N formando un ángulo α= 30º con la horizontal, determinar la velocidad al cabo de los 15 segundos.

Solución:

Como necesitamos conocer la normal para calcular la fuerza de fricción, resolvemos primero el eje vertical

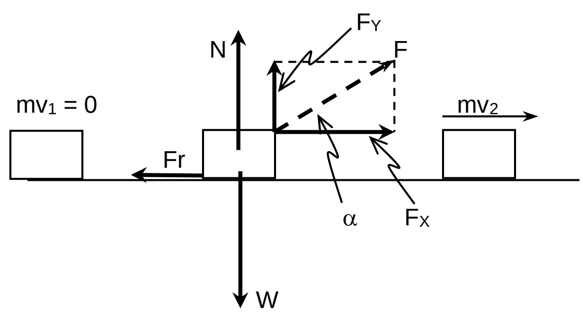
$$+\uparrow \Sigma F_Y = N + F_y - W = 0$$

$$N = W - F_y = mg - F sen\alpha$$

$$N = 80(9.8) - 300 sen 30°$$

$$N = 634[N]$$

La fricción es Fr = μN = 0.1(634)
Fr = 63.4[N]



En el eje x aplicamos la Ec, de impulso y CM

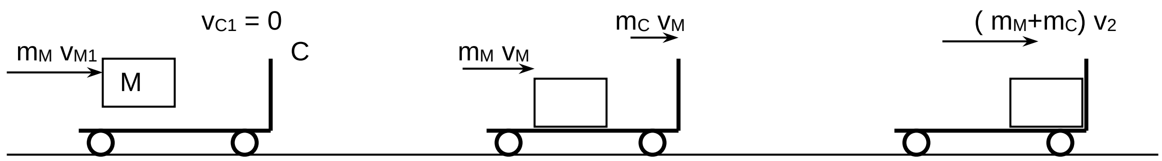
$$mv_{1x} + \Sigma(Ft)_X = mv_{2X}$$

$$0 + F_X t - Frt = mv_{2X}$$

$$F(cos\alpha)t - (Fr)t = (300 cos 30° - 63.4)15 = 80 v_{2X}$$

$$\frac{(259.8 - 63.4)15}{80} = v_{2X} = 36.82 \quad \text{m/s}$$

Ejemplo 5.2 Sobre un carro de plataforma para transportar equipajes que se encuentra en reposo, se lanza una maleta con una velocidad horizontal de 2.8 m/s, si el carro puede rodar libremente, encontrar la velocidad del sistema carro-maleta justo cuando ésta ha terminado de deslizarse sobre la plataforma. La masa de la maleta es m_M = 30 kg y la del carro es de m_C=25 kg.



Solución: Aplicando el principio del impulso y la cantidad de movimiento al sistema carro-maleta nos percatamos que al inicio del proceso la cantidad de movimiento existente es la de la maleta, ya que el carro está en reposo, conforme la maleta se desliza sobre la plataforma le transmite parte de su cantidad de movimiento (por lo que la maleta va perdiendo parte de su velocidad) y el carro empieza a moverse aumentando su rapidez, al final, cuando la maleta ha terminado de deslizarse ambos cuerpos se mueven juntos, con la misma velocidad, v_2, y el proceso de transferencia de cantidad de movimiento ha terminado.

$$(m_M v_M + m_C v_C)_1 = (m_M + m_C)\, v_2$$
$$30(2.8) + 25\,(0) = (30 + 25)\, v_2$$
$$v_2 = 1.53 \text{ m/s}$$

Nótese que en todo el proceso no intervienen impulsos externos; también que el intercambio en la cantidad de movimiento ocurre en el eje x. Mientras que en el eje vertical los pesos de los cuerpos son equilibrados por las reacciones normales y no existe cambio en la cantidad de movimiento, que además, se mantiene igual a cero.

Ejemplo 5.3 Un cañón de 650kg dispara una bala de 4 kg a 700 m/s, si la bala tarda en salir del cañón 0.03 s, encontrar: A) La velocidad del cañón en el instante en que la bala ha salido. B) El impulso sobre la bala. C) La fuerza impulsora media que actúa sobre la bala. El soporte del cañón está rígidamente unido (empotrado) al suelo y la reacción horizontal o "culatazo" se absorbe mediante dos resortes

Solución: Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento al sistema bala – cañón, observamos que las fuerzas impulsivas de la explosión entre el cañón y la bala son internas y por lo tanto se anulan. Por otro lado, las fuerzas elásticas de los resortes no son impulsivas por lo que su efecto en el pequeño intervalo de tiempo Δt = 0.03 s puede no ser considerado. Entonces:

$$(m_C\, v_C + m_B\, v_B)_1 = (m_C v_C + m_B v_B)_2$$

$$(650)\,(0) + (4)\,(0) = 650\, v_C + 4\,(700)$$

$$v_C = \frac{-4(700)}{650} = -4.31 \text{ m/s}$$

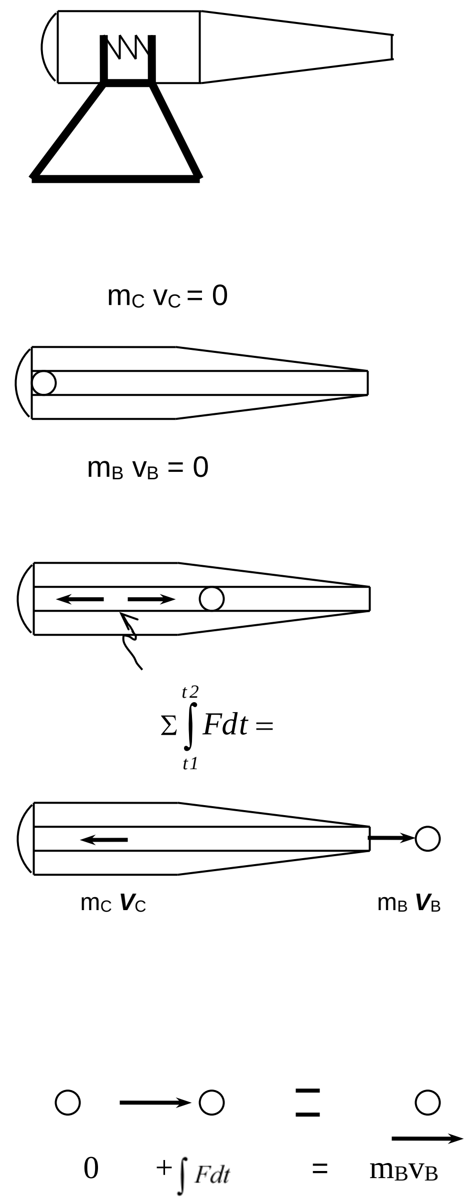
El impulso y la fuerza impulsiva media ejercida por la explosión sobre la bala inicialmente en reposo, puede determinarse aplicando el impulso y la cantidad de movimiento a la bala:

$$m_B v_{B1} + \Sigma\int_{t1}^{t2} F dt = m_B v_{B2}$$

$$I = \Sigma\int_{t1}^{t2} F dt = (4)\,(700) - 0 = 2800\ [N \cdot s]$$

$$0 + F_{MED}\,(0.03) = (4)\,(700)$$

$$F_{MED} = 93\,333 \text{ N}$$



Bibliografía

R.C. Hibbeler. Mecánica para Ingenieros. Dinámica. Ed. CECSA.

Beer y Jhonston. Mecánica Vectorial para ingenieros. Dinámica Mc.Graw Hill

Resnick y Halliday. Física parte 1. CECSA

John D. Bernal. La ciencia en la historia. Ed. Nueva Imagen UNAM. 8ª Edición. 1986.

García Díaz Rafael. Sistema Internacional de Unidades. Ed. Limusa 1ª Edición 1984

Las medidas y los hombres Ed. Siglo XXI

Diccionario de términos científicos y técnicos. Planeta-Agostini. 1987. Barcelona